**1. Предел последовательности.**

**Пределом** последовательности {xn} называют такое число а, что {xn − a} – бесконечно малая последовательность. Для предела используют запись:

lim n→∞xn = a. Последовательность, имеющую (конечный) предел a, называют сходящейся (к пределу а).

Ясно, что предел бесконечно малой последовательности равен нулю.

Если {xn}- бесконечно большая последовательность, то пишут lim n→∞xn = ±∞. Если при этом, начиная с некоторого номера, все xn>0, то lim n→∞xn = +∞; если же, начиная с некоторого номера, все xn <0, то lim n→∞xn = −∞.

Последовательность {xn} называют:

• Возрастающей, если xn<xn+1 для всех n.

• Неубывающей, если xn ≤ xn+1для всех n.

• Убывающей, если xn > xn+1 для всех n.

• Невозрастающей, если xn ≥ xn+1 для всех n. Все такие последовательности называют монотонными.

Любая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

**2. Предел функции и его свойства. Односторонние пределы.**

**Бесконечные пределы. Пределы на бесконечности.**

Будем считать, что функция y=f(x) определена в некоторой окрестности

точки x0 кроме, может быть, самой точки x0.

**Пределом функции** y=f(x) в точке x0 ( или при x→ x0) называют число а, если для любой последовательности {xn} значений аргумента, сходящейся к x0( при этом все xn ≠ x0), последовательность {f(xn)} значений функции сходится к пределу а.

Если lim x→x0 f(x)=∞ ( или +∞,или − ∞), то говорят о **бесконечном пределе функции.**

Число а называют **пределом функции f(x) в точке** x0 **справа**, если для любой сходящейся к x0 последовательности {xn}, у которой все x0 > xn, соответствующая последовательность {f(xn)}сходится к а. Это записывают так:

lim x→x0+0f(x)*=*a Аналогично определяют **предел функции f(x) в точке** x0 **слева**: lim x→x0−0f(x) = f(x0 − 0)=a Пределы функции слева и справа называют **односторонними пределами**.

**Свойства пределов функций**:

1.Предел суммы/разности двух функций равен сумме/разности их

пределов:

2.Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

3.Предел частного двух функций равен частному их пределов, при

условии, что предел знаменателя не равен нулю:

4.Константу можно выносить за знак предела:

5. Предел степени с натуральным показателем равен степени предела:

Число называется **пределом функции на бесконечности** или

при , если для любого существует число такое, что

для всех из того, что , выполняется неравенство .

**3. Первый и второй замечательные пределы.**

**Первый замечательный предел**

Рассмотрим следующий предел:

пробуем подставить ноль в функцию: в числителе у нас получается ноль

(синус нуля равен нулю), в знаменателе, очевидно, тоже ноль. Таким образом,

мы сталкиваемся с неопределенностью вида , которую, к счастью,

раскрывать не нужно. В курсе математического анализа, доказывается, что:

Данный математический факт носит название **Первого замечательного**

**предела**. Нередко в практических заданиях функции могут быть расположены

по-другому, это ничего не меняет:

– тот же самый первый замечательный предел.

**! Но самостоятельно переставлять числитель и знаменатель нельзя!**

**Если дан предел в виде , то и решать его нужно в таком же виде,**

**ничего не переставляя.**

На практике в качестве параметра может выступать не только

переменная , но и элементарная функция, сложная функция. **Важно лишь,**

**чтобы она стремилась к нулю**.

Примеры:

, , ,

Здесь , , , , и всё гуд – первый

замечательный предел применим.

Пример 1

Найти предел

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать

на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это

мысленно или на черновике):

Итак, у нас есть неопределенность вида , ее *обязательно указываем* в

оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый

замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится , а в

знаменателе .

В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно

организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход

рассуждений может быть таким: «под синусом у нас , значит, в знаменателе

нам тоже нужно получить ».

А делается это очень просто:

То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и

делится на ту же семерку. Теперь запись у нас приняла знакомые очертания.

Когда задание оформляется от руки, то первый замечательный предел

желательно пометить простым карандашом:

Что произошло? По сути, обведенное выражение у нас превратилось в

единицу и исчезло в произведении:

Теперь только осталось избавиться от трехэтажности дроби:

Пример 2

Найти предел

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в

числитель и знаменатель ноль:

Действительно, у нас неопределенность и, значит, нужно попытаться

организовать первый замечательный предел. На уроке мы рассматривали

правило, что когда у нас есть неопределенность , то нужно разложить

числитель и знаменатель на множители. Здесь – то же самое, степени мы

представим в виде произведения (множителей):

Далее, по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные

пределы. Под синусами у нас , значит, в числителе тоже нужно получить :

Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные

пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:

Собственно, ответ готов:

Пример 3

Найти предел

Подставляем ноль в выражение под знаком предела:

Получена неопределенность , которую нужно раскрывать. Если в

пределе есть тангенс, то почти всегда его превращают в синус и косинус по

известной тригонометрической формуле В данном случае:

В итоге получена бесконечность, бывает и такое.

Пример 4

Пример 5

**Второй замечательный предел**

В теории математического анализа доказано, что:

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

*Справка: – это иррациональное число.*

В качестве параметра может выступать не только переменная , но и

сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

Пример 6

Найти предел

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый

признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в

выражение

Нетрудно заметить, что при основание степени , а

показатель – , то есть имеется, неопределенность вида :

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго

замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел

не лежит на блюдечке с голубой каемочкой, и его нужно искусственно

организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере

параметр , значит, в показателе нам тоже нужно организовать . Для

этого возводим основание в степень , и, чтобы выражение не изменилось –

возводим в степень :

Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную

букву :

**При этом сам значок предела перемещаем в показатель**:

Далее, отметки карандашом я не делаю, принцип оформления, думаю,

понятен.

Пример 7

Найти предел

*Внимание! Предел подобного типа встречается очень часто,*

*пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример.*

Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее

под знаком предела:

В результате получена неопределенность . Но второй замечательный

предел применим к неопределенности вида . Что делать? Нужно

преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас ,

значит, в числителе тоже нужно организовать :

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

Вроде бы основание стало напоминать , но у нас знак «минус», да

и тройка какая-то вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, делаем

дробь трехэтажной:

Таким образом, основание приняло вид , и, более того, появилась

нужная нам неопределенность . Организуем второй замечательный

предел .

Легко заметить, что в данном примере . Снова исполняем наш

искусственный прием: возводим основание степени в , и, чтобы

выражение не изменилось – возводим в обратную дробь :

Наконец-то долгожданное устроено, с чистой совестью

превращаем его в букву :

Но на этом мучения не закончены, в показателе у нас появилась

неопределенность вида. Делим числитель и знаменатель на :

Готово.

А сейчас мы рассмотрим модификацию второго замечательного предела.

Напомню, что второй замечательный предел выглядит следующим

образом: . Однако на практике время от времени можно

встретить его «перевёртыш», который в общем виде записывается так:

Пример 8

Найти предел

Сначала (мысленно или на черновике) пробуем подставить ноль

(бесконечно малое число) в выражение, стоящее под знаком предела:

В результате получена знакомая неопределенность . Очевидно, что в

данном примере . С помощью знакомого искусственного приема

организуем в показателе степени конструкцию :

Выражение со спокойной душой превращаем в букву :

Еще не всё, в показателе у нас появилась неопределенность вида .

Раскладываем тангенс на синус и косинус (ничего не напоминает?):

Косинус нуля стремится к единице (не забываем помечать карандашом),

поэтому он просто пропадает в произведении:

**4. Непрерывность функции в точке и на множестве.**

**Определение непрерывности функции в точке**. Рассмотрим функцию f

и точку a ∈ R. Если a принадлежит области определения D(f) функции f, то

будем говорить, что функция f **непрерывна** в точке a, если

(∀ε>0∃δ>0∀x∈D(f)) |x−a|<δ⇒|f(x)−f(a)|<ε.

Если к тому же a — предельная точка множества D(f), то непрерывность

f в a равносильна тому, что существует lim x→af(x) и выполнено равенство lim x→a f(x) = f(a). Если же a не является предельной точкой D(f) и тем самым говорить о пределе в этой точке невозможно, то любая функция в такой точке

непрерывна. Договоримся также считать функцию f непрерывной в

предельной точке множества D(f), не принадлежащей D(f), если существует

конечный предел lim x→af(x) (требовать в этом случае равенства его значению функции в точке затруднительно — точка по предположению не входит в

область определения, так что такого значения просто нет).

В случае отсутствия непрерывности функции в данной точке говорят, что

она **разрывна** в этой точке.

**Теорема (о непрерывности функций, полученных в результате**

**алгебраических операций)**. Линейная комбинация, произведение и

отношение (последнее при условии отличия от нуля знаменателя)

непрерывных в точке a функций непрерывны в этой точке.

**Теорема (о непрерывности композиции)**. Пусть функция f непрерывна

в точке a, а функция g непрерывна в точке f(a). Тогда композиция g ◦ f

непрерывна в точке a.

**Определение непрерывности функции на множестве**. Говорят, что

функция непрерывна на множестве, если ее сужение на это множество

непрерывно в каждой точке данного множества.

Подчеркнем, что в данном определении непрерывности функции на

множестве затрагиваются значения только в точках данного множества, в то

время как значения в точках, в него не входящих, никакого влияния на

непрерывность на данном множестве не оказывают.

**5. Свойства функций, непрерывных на отрезке.**

**Свойство 1**: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-

1897) - немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена

на этом отрезке, т.е. на отрезке выполняется условие - .

Доказательство этого свойства основано на том, что функция,

непрерывная в точке , ограничена в некоторой ее окрестности, а если

разбивать отрезок на бесконечное количество отрезков, которые

“стягиваются” к точке , то образуется некоторая окрестность точки .

**Свойство 2**: Функция, непрерывная на отрезке , принимает на нем

наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения и , что ,

причем .

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может

принимать на отрезке и несколько раз (например - ).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на

отрезке называется колебанием функции на отрезке.

**Свойство 3**: (Вторая теорема Больцано - Коши). Функция, непрерывная

на отрезке , принимает на этом отрезке все значения между двумя

произвольными величинами.

**Свойство 4**: Если функция непрерывна в точке , то существует

некоторая окрестность точки , в которой функция сохраняет знак.

**Свойство 5**: (Первая теорема Больцано (1781-1848) - Коши). Если

функция - непрерывная на отрезке и имеет на концах отрезка

значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого

отрезка, где .

Т.е. если , то .

**Определение**. Функция называется **равномерно непрерывной** на

отрезке , если для любого существует такое, что для любых

точек и таких, что верно

неравенство .

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для

любого e существует свое , не зависящее от , а при “обычной”

непрерывности зависит от и .

**Свойство 6**: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918) - немецкий

математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на

нем. (Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и

полуинтервалов.)

**Свойство 7**: Если функция определена, монотонна и непрерывна на

некотором промежутке, то и обратная ей функция тоже однозначна,

монотонна и непрерывна.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек

разрыва, если они есть. в точке функция

непрерывна в точке

точка разрыва 1 - го рода.

**6. Асимптоты графика функции. Виды асимптот.**

Асимптоты графика функции у = (х) — это прямые Ах + By + С = 0,

характеризующие поведение графика функции на бесконечности. При

неограниченном увеличении х или у график функции неограниченно

приближается к асимптоте. Различают вертикальные и наклонные

асимптоты.

**Виды асимптот.**

• Прямая x = x0 называется **вертикальной асимптотой** графика функции y=f(x), если хотя бы одно из предельных значений

x→xlim 0−0f(x) или x→xlim 0+0f(x) равно +∞ или −∞ .

• Прямая y = y0 называется **горизонтальной асимптотой** графика функции y =f(x), если хотя бы одно из предельных значений x→+∞lim f(x) или x→−∞lim f(x) равно y0

• Прямая y=kx+b называется **наклонной асимптотой** графика функции

y=f(x), если x→∞lim [f(x) − kx − b] = 0

**7. Производная и дифференциал функции. Их геометрический**

**смысл.** Производной функции y=f(x) в точке x=x0 называют предел

y’(x0) = ∆x→0

lim f(x0+∆x)−f(x∆x 0)

= ∆x→0

lim ΔyΔx

Если этот предел существует и конечен, то функцию *f*(x) называют

дифференцируемой в точке x0.

Дифференциал функции y = f(x) равен произведению её производной на

приращение независимой переменной x (аргумента).

Это записывается так:

∂y = y′∆x

Или

∂f(x) = f′(x) ∆x

**Геометрический смысл производной.** Производная в точке x 0 равна

угловому коэффициенту касательной к графику функции y = f(x) в этой точке.

Из видно, что для любых двух точек A и B графика функции:

f(x0+∆x)−f(x0)

∆x , где a угол наклона секущей AB. Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку

A и двигать по направлению к ней точку B, то Δx неограниченно уменьшается

и приближается к 0, а секущая АВ приближается к касательной АС.

Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту

касательной в точке A.

tg*a =* dydx *= f’*(x0)

**8. Правила дифференцирования.**

**Теорема 1**

Постоянный множитель c можно выносить за знак производной:

Теорема 1 непосредственно вытекает из определения производной

функции и свойства пределов функций, согласно которому постоянный

множитель можно выносить за знак предела.

**Теорема 2**

Если существуют производные и , то производная от суммы

(разности) функций и равна сумме (разности) производных:

Правило дифференцирования суммы или разности функций также

следует из определения производной функции и свойства пределов функций,

согласно которому предел суммы (или разности) функций равен сумме (или

разности) соответствующих пределов.

**Теорема 3**

Если существуют производные и , то выполняются

следующие правила дифференцирования произведения функций и частного от

их деления:

**9. Основные теоремы о дифференцируемых функциях**

**(формулировки).**

**Теорема Ферма** (О равенстве нулю производной)

Пусть функция y = f(x)удовлетворяет следующим условиям:

1. она дифференцируема на интервале (a;b)

2. достигает наибольшего или наименьшего значения в точке x0 ∈ (a; b)

Тогда производная в этой точке равна нулю, то есть f′(x0) = 0 **Следствие.** (Геометрический смысл теоремы Ферма)

В точке наибольшего и наименьшего значения, достигаемого внутри

промежутка, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

**Теорема Ролля** (О нуле производной функции, принимающей на

концах отрезка равные значения)

Пусть функция y = f(x)

непрерывна на отрезке [a;b]

дифференцируема на интервале (a;b)

на концах отрезка принимает равные значения f(a) = f(b)

Тогда на интервале (a;b) найдется, по крайней мере, одна точка , в

которой f′(x0) = 0

**Следствие.** (Геометрический смысл теоремы Ролля)

Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции

будет параллельна оси абсцисс.

**Следствие.**

Если f(a) = f(b) = 0, то теорему Ролля можно сформулировать

следующим образом: между двумя последовательными нулями

дифференцируемой функции имеется, хотя бы один, нуль производной.

**Теорема Лагранжа.** (О конечных приращениях)

Пусть функция y = f(x)

непрерывна на отрезке [a;b];

дифференцируема на интервале (a;b).

Тогда на интервале (a;b) найдется по крайней мере одна точка x0 , такая, что

f(b) − f(a)

b − a = f′(x0) Замечание:

Теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа, когда f(a) =

f(b) **Следствие.** (Геометрический смысл теоремы Лагранжа)

На кривой y = f(x) между точками a и b найдется точка M(x0;f(x0)) , такая, что через эту точку можно провести касательную, параллельную

хорде AB

Доказанная формула называется **формулой Лагранжа** или **формулой**

**конечных приращений**. Она может быть переписана в виде:

f(b) − f(a) = f′(x0)(b − a)

**Теорема Коши.** (Об отношении конечных приращений двух функций)

Если функции y = f(x) и y = g(x):

непрерывны на отрезке [a;b];

дифференцируемы на интервале (a;b).;

производная g′(x) ≠ 0 на интервале (a;b).,

тогда на этом интервале найдется по крайней мере одна точка x0 , такая, что

**Теорема**

Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то

функция является постоянной на этом промежутке.

**Теорема**

Если две функции имеют равные производные на некотором

промежутке, то они на этом промежутке отличаются друг от друга на

некоторое слагаемое.

**10. Монотонность и экстремумы функции.**

**Монотонная функция** — это функция, приращение которой не меняет

знака, то есть либо всегда неотрицательное, либо всегда неположительное.

Если в дополнение приращение не равно нулю, то функция называется **строго**

**монотонной**. Монотонная функция — это функция, меняющаяся в одном и

том же направлении.

Функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует

большее значение функции. Функция убывает, если большему значению

аргумента соответствует меньшее значение функции.

Пусть дана функция Тогда

● функция называется **возрастающей** на , если

.

● функция называется **строго возрастающей** на , если

.

● функция называется **убывающей** на , если

.

● функция называется **строго убывающей** на , если

.

(Строго) возрастающая или убывающая функция называется (*строго)*

*монотонной*.

**Определение экстремума**

Функция y = f(x) называется **возрастающей (убывающей**) в некотором

интервале, если при x1<x2 выполняется неравенство (f(x1) < f(x2)

(f(x1) > f(x2)).

Если дифференцируемая функция y = f(x) на отрезке [a, b] возрастает

(убывает), то её производная на этом отрезке f '(x) > 0

**(f ' (x) < 0).**

Точка называется **точкой локального максимума (минимума)**

функции f(x), если существует окрестность точки , для всех точек которой

верно неравенство f(x) ≤ f( ) (f(x) ≥ f( )).

Точки максимума и минимума называются точками экстремума, а

значения функции в этих точках - её экстремумами.

**Точки экстремума**

**Необходимые условия экстремума.** Если точка является точкой

экстремума функции f(x), то либо f '( ) = 0, либо f ( ) не существует. Такие

точки называют критическими, причём сама функция в критической точке

определена. Экстремумы функции следует искать среди её критических точек.

**Первое достаточное условие.** Пусть - критическая точка. Если f ' (x)

при переходе через точку меняет знак плюс на минус, то в точке функция

имеет максимум, в противном случае - минимум. Если при переходе через

критическую точку производная не меняет знак, то в точке экстремума нет.

**Второе достаточное условие.** Пусть функция f(x) имеет производную

f ' (x) в окрестности точки и вторую производную в самой точке .

Если f ' ( ) = 0, >0 ( <0), то точка является точкой локального

минимума (максимума) функции f(x). Если же =0, то нужно либо

пользоваться первым достаточным условием, либо привлекать высшие

производные.

На отрезке [a,b] функция y = f(x) может достигать наименьшего или

наибольшего значения либо в критических точках, либо на концах отрезка

[a,b].

**11. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба.**

График

функции y=f(x) называется **выпуклым** на

интервале (a; b), если он расположен ниже любой

своей касательной на этом интервале.

График

функции y=f(x) называется **вогнутым** на

интервале (a; b), если он расположен выше любой своей касательной на этом

интервале.

На рисунке показана кривая, выпуклая на (a; b) и вогнутая на (b; c).

Рассмотрим достаточный признак, позволяющий установить, будет ли

график функции в данном интервале выпуклым или вогнутым.

**Теорема.** Пусть y=f(x) дифференцируема на (a; b). Если во всех точках

интервала (a; b) вторая производная функции y = f(x) отрицательная,

т.е. f''(x)<0, то график функции на этом интервале выпуклый, если же f''(x) > 0

– вогнутый.

**Доказательство.** Предположим для определённости, что f''(x) < 0 и

докажем, что график функции будет выпуклым.

Возьмём на графике функции y = f(x) произвольную точку M0 с

абсциссой x0

(a; b) и проведём через точку M0 касательную. Её уравнение

. Мы должны показать, что график

функции на (a; b) лежит ниже этой касательной, т.е.

при одном и том же значении ордината кривой y =

f(x) будет меньше ордината касательной.

**Точка перегиба функции**

Точка перегиба функции внутренняя точка области

определения , такая что непрерывна в этой точке, существует конечная или

определённого знака бесконечная производная в этой точке, и является

одновременно концом интервала строгой выпуклости вверх и началом

интервала строгой выпуклости вниз, или наоборот.

**Неофициальное**

В этом случае точка является точкой перегиба графика

функции, то есть график функции в точке «перегибается» через

касательную к нему в этой точке: при касательная лежит под графиком

, а при — над графиком (или наоборот)

**Условия существования**

Необходимое условие существования точки перегиба: если функция f(x),

дважды дифференцируемая в некоторой окрестности точки , имеет в

точку перегиба, то .

Достаточное условие существования точки перегиба: если функция

в некоторой окрестности точки раз непрерывно дифференцируема, причём

нечётно и , и при , а , то функция

имеет в точку перегиба.

**12. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.**

**Первообразной функции** *f(x)* на промежутке *(a; b)* называется такая

функция *F(x)*, что выполняется равенство для любого *х* из

заданного промежутка.

Если принять во внимание тот факт, что производная от

константы *С* равна нулю, то справедливо равенство . Таким

образом, функция *f(x)* имеет множество первообразных *F(x)+C*, для

произвольной константы *С*, причем эти первообразные отличаются друг от

друга на произвольную постоянную величину.

Все множество первообразных функции *f(x)* называется

**неопределенным интегралом** этой функции и

обозначается .

Выражение называют подынтегральным выражением,

а *f(x)* – подынтегральной функцией. Подынтегральное выражение

представляет собой дифференциал функции *f(x)*.

Действие нахождения неизвестной функции по заданному ее

дифференциалу называется ***неопределенным* интегрированием**, потому что

результатом интегрирования является не одна функция *F(x)*, а множество ее

первообразных *F(x)+C*.

На основании свойств производной можно сформулировать и

доказать **свойства неопределенного интеграла** (свойства первообразной).

• Производная результата

интегрирования равна подынтегральной функции.

• Неопределенный интеграл

дифференциала функции равен сумме самой функции и

произвольной константы.

• , где *k* – произвольная константа.

Коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла.

• Неопределенный интеграл

суммы/разности функций равен сумме/разности неопределенных

интегралов функций.

Промежуточные равенства первого и второго свойств неопределенного

интеграла приведены для пояснения.

Для доказательства третьего и четвертого свойств достаточно найти

производные от правых частей

равенств:

Эти производные равны подынтегральным функциям, что и является

доказательством в силу первого свойства. Оно же используется в последних

переходах.

Таким образом, задача интегрирования является обратной задаче

дифференцирования, причем между этими задачами очень тесная связь:

-первое свойство позволяет проводить проверку интегрирования. Чтобы

проверить правильность выполненного интегрирования достаточно

вычислить производную полученного результата. Если полученная в

результате дифференцирования функция окажется равной подынтегральной

функции, то это будет означать, что интегрирование проведено верно;

-второе свойство неопределенного интеграла позволяет по известному

дифференциалу функции найти ее первообразную. На этом свойстве основано

непосредственное вычисление неопределенных интегралов.

**13. Методы интегрирования.**

**1. Непосредственное интегрирование**

Под непосредственным интегрированием понимают такой способ

интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных

преобразований подынтегральной функции и применения свойств

неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным

интегралам.

**Пример 1.** Найти .

Разделив числитель на знаменатель, получим:

= .

Отметим, что нет надобности после каждого слагаемого ставить

произвольную постоянную, потому что их сумма есть также произвольная

постоянная, которую мы пишем в конце.

**2. Интегрирование методом замены переменной**

Вычислить заданный интеграл непосредственным интегрированием

удается далеко не всегда, а иногда это связано с большими трудностями. В

этих случаях применяют другие приемы. Одним из наиболее эффективных

является метод замены переменной. Сущность его заключается в том, что

путем введения новой переменной интегрирования удается свести заданный

интеграл к новому, который сравнительно легко берется непосредственно.

Существуют два варианта этого метода.

**а) Метод подведения функции под знак дифференциала**

По определению дифференциала функции .

Переход в этом равенстве слева направо называют "подведением

множителя под знак дифференциала".

**Теорема об инвариантности формул интегрирования**

Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке

вместо независимой переменной любой дифференцируемой функции от нее,

т.е., если

, то и ,

где - любая дифференцируемая функция от*x*. Ее значения должны

принадлежать интервалу, в котором функция определена и непрерывна.

**Доказательство:**

Из того, что , следует . Возьмем теперь

функцию . Для ее дифференциала в силу свойства

инвариантности формы первого дифференциала функцииимеем

.

Отсюда .

Пусть требуется вычислить интеграл . Предположим, что

существуют дифференцируемая функция и функция такие, что

подынтегральное выражение может быть записано в виде

. (1)

Тогда

,

(2)

т.е. вычисление интеграла сводится к вычислению интеграла

и последующей подстановке .

**Пример 1.** .

**б) Метод подстановки (метод введения новой переменной)**

Пусть интеграл ( - непрерывна) не может быть

непосредственно преобразован к виду табличного. Сделаем подстановку

, где - функция, имеющая непрерывную производную. Тогда

, и

. (3)

Формула (3) называется формулой замены переменной в неопределенном

интеграле.

Как правильно выбрать подстановку? Это достигается практикой в

интегрировании. Но можно установить ряд общих правил и некоторых

приемов для частных случаев интегрирования.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем.

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный

интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение,

если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой

переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают

дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот

дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4. Производят замену под интегралом.

5. Находят полученный интеграл.

6. Производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной.

**Пример 19.**Найти .

• Вычислим интеграл , придерживаясь следующей формы

записи:

= .

Этот интеграл найдем подведением под знак дифференциала.

= .

**3. Метод интегрирования по частям**

Пусть и - непрерывно дифференцируемые функции. На

основании формулы дифференциала произведения имеем

.

Отсюда

.

Интегрируя, получим: или окончательно

. (4)

**14. Определенный интеграл и его геометрический смысл. Свойства**

**определённого интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом.**

**Формула Ньютона-Лейбница.**

В неопределенном интеграле не заданы границы интегрирования, и в

результате нахождения неопределенного интеграла от функции мы

получаем множество первообразных, отличающихся друг от друга на

постоянную величину С.

Если заданы границы интегрирования, то мы получаем **определенный**

**интеграл**:

**Геометрический смысл определенного интеграла**

Пусть на отрезке [*a*, *b*] задана непрерывная неотрицательная

функция *y* = *f*(*x*). **Криволинейной трапецией** называется фигура,

ограниченная сверху графиком функции *y* = *f*(*x*), снизу – осью Ох, слева и

справа – прямыми *x = a* и *x = b* (рис. 2).

Определенный интеграл от неотрицательной функции *y* = *f*(*x*) с

геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции,

ограниченной сверху графиком функции *y* = *f*(*x*), слева и справа – отрезками

прямых *x = a* и *x = b*, снизу – отрезком оси Ох.

***Свойства определенного интеграла***

Ниже предполагается, что f(x) и g(x) - непрерывные функции на

замкнутом интервале [a,b].

1. b∫a1dx=b−a

2. b∫akf(x)dx=kb∫af(x)dx, где k - константа;

3. b∫a[f(x)+g(x)]dx=b∫af(x)dx+b∫ag(x)dx

4. b∫af(x)dx=c∫af(x)dx+b∫cf(x)dx, где a<c<b;

5. Если 0≤f(x)≤g(x) для всех x∈[a,b], то 0≤b∫af(x)dx≤b∫ag(x)dx.

6. a∫af(x)dx=0

7. b∫af(x)dx=−a∫bf(x)dx

8. Если f(x)≥0 в интервале [a,b], то b∫af(x)dx≥0

F(x)=x∫af(t)dt, f∈R(a,b),x∈[a,b]. Такая функция называется *интегралом с*

*переменным верхним пределом*.

**Формула Ньютона-Лейбница** - даёт соотношение между операциями

взятия определенного интеграла и вычисления первообразной. Формула

Ньютона-Лейбница - основная формула интегрального исчисления.

Данная формула верна для любой функции **f(x)**, непрерывной на

отрезке **[а, b]**, **F** - первообразная для **f(x)**. Таким образом, для вычисления

определенного интеграла нужно найти какую-либо

первообразную **F** функции **f(x)** , вычислить ее значения в точках **a и b** и найти

разность **F(b) – F(a)**.

**15. Несобственный интеграл.**

Определенный интеграл b∫af(x)dx называется *несобственным*

*интегралом*, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

• Предел a или b (или оба предела) являются бесконечными;

• Функция f(x) имеет одну или несколько точек разрыва внутри

интервала [a,b].

**16. Функция двух переменных и ее график. Понятие предела и**

**непрерывности функции в точке. Линии уровня.**

**Функция двух переменных.**Если каждой паре ( x;y) значений двух

независимых друг от друга переменных величин х и у из некоторого

множества D соответствует единственное значение величины, то говорят, что

z есть функция двух независимых переменных x и y, определенная на

множестве D.

Обозначается: z=f(x;y) или z=z(x;y).

Например, z = x2 + y2, z = f(x;y); S=ab, S=S(a;b) - функции двух

переменных; V=abc, V=V(a,b,c) – функция трех переменных;

**График функции двух переменных.** Графиком функции z= f(x,y)

называется поверхность, представляющая собой геометрическое место точек

функции, когда точка (x,y) принимает все значения из области определения.

**Линии уровня.** Линией уровня функции z= f(x,y) называется множество

точек на плоскости таких, что во всех этих точках значение функции одно и то

же f(x,y)=c, где с=const. Число с называется уровнем

**Понятие предела и непрерывности функции в точке.** Действительное

число А **называется пределом функции** f(x) при x → a, если для любой

окрестности Oε(A) точки A существует окрестность Oδ(a)точки α такая, что для любого x ∈ X\a из окрестности Oδ(a) значения f(x) попадают в окрестность Oε(A)

Функция f(x) называется **непрерывной в точке** a , если:

1. функция f(x) определена в точке a и ее окрестности;

2. существует конечный предел функции f(x) в точке a;

3. этот предел равен значению функции в точке a, т.е. lim x →a f(x) = f(lim x→a x) = f(a)

**17. Частные производные. Дифференциал функции в точке и его**

**геометрический смысл.**

**Частные производные.** Это предел отношения приращения функции по

выбранной переменной к приращению этой переменной, при стремлении

этого приращения к нулю.

Частные производные для функции двух переменных z(x,y)

записываются в следующем видe zx′,zy ′ и находятся по формулам:

Частные производные первого порядка

zx′ = ∂z∂y

zy′ = ∂z∂y

Частные производные второго порядка

zxx′′ = ∂2z

∂x∂x zyy′′ = ∂2z

∂y∂y

zxy′′ = ∂2z

∂x∂y

zyx′′ = ∂2z

∂y∂x

**Дифференциал функции в точке и его геометрический смысл.**

Дифференциалом функции y = f(x) в точке x называется произведение

производной f′(x) в этой точке на приращение аргумента ∆x.

dy = f′(x) ∙ ∆x

К графику функции y = f(x) в точке M(x,y) проведем касательную.

α – угол наклона касательной к оси Ox.

Дадим x приращение ∆x, тогда функция получит приращение ∆y. На

кривой получим точку M1(x+∆x,y+∆y), KT – **приращение ординаты**

**касательной.**

tgα = f′(x)

Геометрически KT = dy

Дифференциал функции y=f(x) в т. x равен приращению ординаты

касательной при переходе из точки с абсциссой x в точку с абсциссой x+∆x.

**18. Производная функции по направлению. Градиент функции.**

**Производная по направлению** — одно из обобщений понятия

производной функции нескольких переменных (u = *f*(x, y, z)). Производная по

направлению показывает, как быстро функция изменяется при движении в

заданном направлении.

Формула, по которой можно найти производную по направлению:

**Градиент** — это производная по пространству, но в отличие от

производной по одномерному времени, градиент является не скаляром, а

векторной величиной. Градиент характеризует направление и максимальную

величину функции в точке.

Вектор с координатами называется градиентом функции

u = *f*(x, y, z) и обозначается:

**19. Частные производные и дифференциалы высших порядков**

**функции двух переменных.**

Частные производные – почти то же самое, что и «обычные» производные

функции одной переменной. Для частных производных справедливы все

правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций.

Есть только пара небольших отличий... На курсе в задачах мы встречали

частные производные первого и второго порядка, т.е. z`x и z``x соответственно.

Правила:

1. Когда мы дифференцируем *x*, то переменная *y* считается константой.

2. Когда же дифференцирование осуществляется по *y*, то константой

считается *x*.

3. Правила и таблица производных элементарных функций справедливы

для применения любой переменной, по которой ведется дифференцирование.

Производные второго порядка:

**Дифференциалом второго порядка** функции z=f(х, у) называется

дифференциал от дифференциала (первого порядка) этой функции dnz=d(dn-

1z). Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше

второго.

**20. Безусловный экстремум. Необходимые и достаточные условия его**

**существования.**

**Определение**: Функция z=f (x1,..., xn) имеет максимум (минимум) в точке М0, если существует такая окрестность точки М0, что для всякой точки М этой окрестности выполняется неравенство f(M0)>=f(M) (соответственно

f(M0)<=f(M)). Точки максимума и минимума называют точками экстремума.

**Необходимый признак экстремума**: если функция z=f (x1,..., xn)

определена в окрестности точки экстремума М0 и имеет в ней частные

производные первого порядка, то М0 – стационарная точка, т.е. в этой точке

обращаются в нуль все частные производные первого порядка.

**Достаточный признак экстремума** ( для функции двух переменных):

Пусть функция z=f(x,y) имеет непрерывные частные производные второго

порядка в некоторой окрестности стационарной точки М0(х0,у0). Положим

Δ= z”xx\*z”yy – [z”xy]2

Если ? > 0 в точке М0, то в этой точке функция имеет экстремум:

максимум при z”xx <0 (или z”yy<0) и минимум при при z”xx >0 (или z”yy>0).

Если ? < 0, то в точке М0 нет экстремума.

Пример:

Найти экстремум функции z=х?+ху+у?-2х-3у.

Решение: 1) Найдем частные производные.

Первая производная по х: z”x=2х+у-2 Первая производная по у: z”y=х+2у-3 2)Решим систему уравнений:

2х+у=2 и х+2у=3

Получаем критическую точку (1/3; 4/3).

3)Найдем вторые частные производные.

Вторая производная по х: z”xx=2 Вторая производная по у: z”yy=2 Смешанные производные z”xy=( z”x)’= 1= z”yx Δ = z”xx\*z”yy – [z”xy]2=2\*2-12=3 > 0 => экстремум есть Так как Δ =3>0 и z”xx =2>0, то в точке (1/3; 4/3) точка минимума.

**21. Понятие условного экстремума. Методы исследования функции**

**двух переменных на условный экстремум.**

**Определение:** Условным называется экстремум, который требуется найти для уравнения функции z=f(x,y), не на всей области D, а для точек (х,у), удовлетворяющих некоторому условию g(x,y)=0 (уравнение связи).

Значение в точке условного экстремума в отличие от точки безусловного экстремума сравнивается со значением функции не во всех точках ее окрестности, а только в точках, удовлетворяющих уравнениям связи.

**Методы исследований функций 1)** Если, используя уравнение связи можно представить одни переменные как функции других, то поиск условного экстремума сводится к поиску «обычного» экстремума функции нескольких переменных.

Пример: Найти условный экстремум z=x2+y2 при условии x+y-2=0 Решение: 1) Выразим у в уравнении связи: у=2-х и подставим в уравнение функции z: Z=x2+(2-x)2=2x2- 4x+4 2) z’=4x-4=0 => 4x=4 => x=1 => y=2-x=2-1=1

z’ - +

--------------------|--------------------------->

1 min

Ответ: Условный min z=z(1;1)=12+12=2 **2)Метод множителей Лагранжа** Если выразить у через х или х через у не удается или очень сложно, то применяют метод множителей Лагранжа.

**Теорема**: Составим функцию Лагранжа:

L(x,y,λ)=f(x,y)+ λ \*g(x,y) Если т.(х0,у0) является точкой условного экстремума функции z=f(x,y), то найдется такое значение λ 0, что т.(х0,у0) является точкой экстремума функции Лагранжа L(x,y, λ).

Из этой теоремы следует, что все частные производны функции Лагранжа должны обращаться в 0, т.е.:

L’x=f’x(x,y) + λ \*g’x(x,y)=0 L’y=f’y(x,y) + λ \*g’y(x,y)=0 L’ λ =g(x,y)=0 (уравнение связи)

Пример. С помощью функции Лагранжа: z=x+y при x2+y2=8 (уравнение связи) L=x+y+ λ (x2+y2-8)

L’x=1+2\* ?\*x=0 x=- 12λ L’y=1+2\* ?\*y=0 у= - 12λ x=y L’ ?= x2+y2=8

x2+x2=8 x=+-2 2x2=8 y=+-2

M1(2;2),M2(-2;2),M3(2;-2),M4(-2;-2)

Z непрерывна на замкнутом ограниченном множестве x2+y2=8, то по т.Вейерштрасса она достигает на нем своих наибольших и наименьших значений. z(2;2)=2+2=4 - max z(-2;2)=-2+2=0 z(2;-2)=0 2(-2;-2)=-4 - min Ответ: условный min z=z(-2;-2)=-4, max z=z(2;2)=4 при x2+y2=8

**22. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных**

**на ограниченном замкнутом множестве.**

Согласно теоремам Вейерштрасса, непрерывная в ограниченной

замкнутой области функция достигает в ней наибольшего

(самого «высокого») и наименьшего (самого «низкого») значений, которые и

требуется найти. Такие значения достигаются либо в стационарных точках,

принадлежащих области D, либо в точках, которые лежат на границе этой

области.

**Алгоритм нахождения**:

1. Строим чертёж, выделяем все части границы области D и находим все

"угловые" точки границы. (Убедились, что это замкнутое ограниченное

множество)

2. Находим стационарные точки внутри D.

3. Находим стационарные точки на каждой из границ.

4. Вычисляем во всех стационарных и угловых точках, а затем выбираем

наибольшее M и наименьшее m значения.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в

замкнутой области .

Это условие можно записать эквивалентной системой или же

в более традиционном для данной задачи виде: .

**Решение**, как всегда, начинается с построения области, которая

представляет собой своеобразную «подошву»:

Найдём стационарные точки:

Система-мечта идиота:)

Стационарная точка принадлежит области, а именно, лежит

на её границе.

II) Исследуем границу области. Не мудрствуя лукаво, начнём с оси

абсцисс:

1) Если , то

Найдём, где вершина параболы:

– ценИте такие моменты – «попали» прямо

в точку , с которой уже всё ясно. Но о проверке всё равно не забываем:

Вычислим значения функции на концах отрезка:

2) С нижней частью «подошвы» разберёмся «за один присест» – безо

всяких комплексов подставляем в функцию, причём, интересовать

нас будет лишь отрезок :

Контроль:

Вот это уже вносит некоторое оживление в монотонную езду по

накатанной колее. Найдём критические точки:

Находим «иксовые» корни и по уравнению определяем

соответствующие ГЗ«игрековые» координаты точек-«кандидатов»:

Вычислим значения функции в найденных точках:

Проверку по функции проведите самостоятельно.

Теперь внимательно изучаем завоёванные трофеи и записываем **ответ**:

.

**23. Двойной интеграл и его геометрический смысл.**

**Двойной интеграл** — обобщение определенного интеграла на случай

функций 2-х переменны дзх.

Пусть в замкнутой области ***D*** плоскости *Oxy* задана

непрерывная ***z = f(x;y)***. Разобьем *D* на *n* частей *Di*, обозначим их площади через *∆Si*, а диаметры — через *di*. В каждой *Di* выберем произв. т. *Mi(xi;yi)* и умножим значение *f(xi;yi)* в этой т. на *∆Si*. Составим *f(x1;y1)∆Si + f(x2;y2)∆Si + ... + f(xn;yn)∆Sn* = ∑ *f(xi;yi)∆Si —* интегральную сумму *f(x;y)*.

Рассмотрим lim, когда *n* → ∞, что max *di* → 0. Если этот lim Ǝ и не зависит от сп. разбиения *D* на части, ни от выбора точек в них, то он называется

**двойным интегралом** и определяется равенством:

**Достаточное условие интегрируемости функции**: если ф-

ция ***z = f(x;y)*** непрерывна в *D*, она интегрируема в этой области.

**Геометрический смысл**: двойной интеграл от неотрицательной функции

равен объему цилиндрического тела.

Сверху тело ограничено поверхностью *z = f(x;y)*, снизу — замкнутой

областью *D* пл-ти *Оxy,* с боков — цилиндрической поверхностью, ǁ *Oz*,

направляющая — граница области *D.*

Найдем *V*: разобьем *D* на n областей *Di*, площади которой равны *∆Si*. Рассм. столбики с основаниями *Di*, ограниченные сверху кусками

поверхности *z = f(x;y)*, обозначим их через *∆Vi*. Получим V = ∑*∆Vi*. В каждой *Di* возьмем *Mi(xi;yi)* и заменим столбики прямыми цилиндрами, *∆Vi* ≈ *f(xi;yi)∆Si*.

**24. Числовой ряд. Необходимый признак сходимости.**

**Геометрическая прогрессия. Гармонический ряд.**

Сумма бесконечного числа членов числовой последовательности

называется **числовым рядом**. При этом число an c общим номером n

называют общим членом ряда, а сумму конечного числа членов

Sn=a1+a2+...+an -n-й частной суммой ряда. Если последовательность частных

сумм S1=a1; S2=a1+a2; S3=a1+a2+a3; ...

Имеет конечный предел S=lim n→∞Sn, то числовой ряд

называется сходящимся, а число S – суммой

ряда. **Необходимый признак сходимости.**

**Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю:**

**Гармонический ряд** — числовой ряд 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ... + 1/n + ....

Называется он так потому, что каждый член гармонического ряда,

начиная со второго, равен среднему гармоническому двух соседних. Члены

гармонического ряда с возрастанием номера убывают и стремятся к нулю,

однако частичные суммы Sn = 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n неограниченно возрастают. Общий член гармонического ряда стремится к 0.

limn→∞1n=0

• обобщённый гармонический ряд сходится, если *p* > 1 и

расходится, если *p* ≤ 1;

• геометрический ряд сходится, если |*q*| <1 и расходится,

если|*q*| ≥ 1.

**25. Сходимость рядов с положительными членами. Признаки**

**сходимости.**

Для числовых рядов с положительными членами an>0 (критерием

сходимости для таких рядов служит ограниченность последовательности

частичных сумм ряда).

**Первый признак сравнения.**

Пусть даны два ряда с положительными общими членами и .

Пусть для этих рядов выполняется неравенство (n=1, 2,...), то есть члены

первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда.

Тогда из сходимости второго ряда (ряда с большим общим членом)

следует сходимость первого ряда, а из расходимости первого ряда (ряда с

меньшим общим членом) – расходимость второго ряда.

**Второй признак сравнения.**

Пусть даны два ряда с положительными общими членами и .

Если , то есть предел отношения общих членов ряда равен

конечному и отличному от нуля числу, то оба ряда ведут себя одинаково: или

оба сходятся, или оба расходятся.

**Признак Даламбера (в предельной форме).** Пусть для числового ряда с

полож. членами существует конечный предел n→∞

lim an+1

an .Тогда при d<1 сходится, а при d>1 ряд расходится.

**Радикальный признак Коши.**

Пусть для числового ряда с положительными членами существует

конечный предел n→∞lim (√an n

) =c≠1.Тогда при c<1 ряд сходится, а при c>1 ряд

расходится.

**Интегральный признак Коши.**

Пусть члены числового ряда an=f(n) являются значениями неотрицательной непрерывной функции f(x), монотонно убывающей на луче

[1;+∞). Тогда ряд

и несобственный интеграл ∫ f(x)dx +∞

1 сходится или расходится одновременно.

**26. Знакочередующиеся ряды. Признак сходимости Лейбница.**

Знаки членов знакочередующегося ряда строго чередуются:

Например, 1−1/2+1/3−1/4+... – знакочередующийся ряд.

Сходимость знакочередующихся рядов выясняют по признаку Лейбница.

**Признак Лейбница**: если члены знакочередующегося ряда убывают по

модулю, то ряд сходится.

Или можно выделить два пункта:

1) Ряд является знакочередующимся.

2) Члены ряда убывают по модулю: , причём, убывают

монотонно. Члены ряда строго монотонно убывают по модулю, если

КАЖДЫЙ СЛЕДУЮЩИЙ член ряда по модулю МЕНЬШЕ, чем предыдущий:

. Для ряда выполнена строгая монотонность

убывания:

Члены ряда нестрого монотонно убывают по модулю, если КАЖДЫЙ

СЛЕДУЮЩИЙ член ряда по модулю НЕ БОЛЬШЕ предыдущего: .

Рассмотрим ряд с факториалом: Здесь имеет место

нестрогая монотонность, так как первые два члена ряда одинаковы по модулю.

То есть, каждый следующий член ряда по модулю не больше предыдущего:

.

В условиях теоремы Лейбница должна выполняться монотонность

убывания (неважно, строгая или нестрогая). Кроме того, члены ряда могут

*даже некоторое время возрастать по модулю*, но «хвост» ряда обязательно

должен быть монотонно убывающим.

**27. Сходимость рядов с членами произвольного знака. Абсолютная и**

**условная сходимость знакопеременных рядов.**

Под ***Знакопеременным* рядом** будем понимать ряд, в котором любой его

член может быть как *Положительным*, так и *Отрицательным*.

Рассмотрим случай ряда с членами, имеющими произвольные знаки:

(9.4.2)

Одновременно рассмотрим ряд

(9.4.3)

Где – члены ряда (9.4.2).

**Теорема (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).**

Из *Сходимости* ряда (9.4.3) следует *Сходимость* ряда (9.4.2).

**Определение.** Ряд называется *Абсолютно сходящимся****,*** если сходится как

сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

**Определение.** Ряд называется *Условно сходящимся****,*** если сам ряд

сходится, а ряд, составленный абсолютных величин его членов, расходится.

**Примеры** абсолютной и условной сходимости числовых рядов.

Пример:

Ряд сходится по признаку Лейбница,

однако гармонический ряд расходится, следовательно, сходимость

условного ряда является условной.

Пример:

, . При этот ряд сходится абсолютно (как обобщенный

гармонический ряд). При данный ряд сходится условно.

Грубо говоря, различие между абсолютно сходящимися и условно

сходящимися рядами заключается в следующем: абсолютно сходящиеся ряды

сходятся в основном в силу того, что их члены быстро убывают, а условно

сходящиеся ряды – в результате того, что положительные и отрицательные

слагаемые уничтожают друг друга.

**28. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Свойства**

**степенных рядов.**

***Степенные ряды***

Ряд вида

называется степенным рядом, где an – коэффициент ряда. Подставляя вместо x различные числовые значения, получим различные

числовые ряды, которые могут сходиться или расходиться в зависимости от x.

Множество всех x, при которых ряд (1) сходится, - область сходимости

ряда. Она обязательно содержит точку x = 0.

***Теорема Абеля***

Если степенной ряд (1) сходится при некотором x0 != 0, то он сходится и при любом | x | < | x0 |, причём абсолютно, а если ряд (1) расходится при x1 != 0, то он расходится и при любом | x | > | x1 |

***Следствие***

Существует такое R, что при | x | < R ряд (1) сходится абсолютно, а при

|x| > R расходится; при | x | = R может сходиться либо расходиться.

(-R; R) – интервал сходимости ряда. Радиус равен половине длины

интервала. Область сходимости – интервал и границы (проверить границы на

сходимость!).

***Свойства степенных рядов***

Пусть на промежутке

сходимости (-R; R).

Тогда:

1) f(x) непрерывна в (-R; R);

2) Ряд (2) можно почленно дифференциировать

причём продифференцированная функция также сходится в (-R; R), в чём

можно убедиться по правилу Даламбера;

3) Ряд (2) можно почленно интегрировать в (-R; R), причём промежуток

сходимости не изменится.

**29. Ряды Маклорена и Тейлора. Оценка остатка ряда.**

***Ряд Тейлора***

Если функция f(x) имеет непрерывные производные вплоть до (n+1)-го

порядка, то ее можно разложить в степенной ряд по формуле Тейлора:

***Ряд Маклорена***

Если a = 0, то такое разложение называется рядом Маклорена:

***Остаток ряда***

***Необходимое и достаточное условие сходимости***

**30. Приближённые вычисления с помощью рядов.**

Степенные ряды широко используются в приближенных вычислениях. С

их помощью с заданной точностью можно вычислять значения корней,

тригонометрических функций, логарифмов чисел, определенных интегралов.

Ряды применяются также при интегрировании дифференциальных уравнений.

**Приближенное вычисление значений функций.**

Рассмотрим разложение функции в степенной ряд:

.

Для того, чтобы вычислить приближенное значение функции в заданной

точке *х*, принадлежащей области сходимости указанного ряда, в ее

разложении оставляют первые *n* членов (*n* – конечное число), а остальные

слагаемые отбрасывают:

.

Для оценки погрешности полученного приближенного значения

необходимо оценить отброшенный остаток *rn*(*x*). Для этого применяют следующие приемы:

**- если полученный ряд является знакочередующимся, то**

**используется следующее свойство: *для знакочередующегося ряда,***

***удовлетворяющего условиям Лейбница, остаток ряда по абсолютной***

***величине не превосходит первого отброшенного члена*.**

- если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из

отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической

прогрессией.

- в общем случае для оценки остатка ряда Тейлора можно воспользоваться

формулой Лагранжа: (или *x<c<a*).

**Пример 1**. Пользуясь разложением в ряд sin*x*, вычислить sin20o с

точностью до 0,0001.

Решение. Чтобы можно было пользоваться формулой (2), необходимо

выразить значение аргумента в радианной мере.

Получаем . Подставляя это значение в формулу,

получаем

Полученный ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям

Лейбница. Так как , то этот и все последующие члены ряда

можно отбросить, ограничиваясь первыми двумя членами. Таким образом,

.

**Пример 2**. Вычислить с точностью до 0,01.

Решение. Воспользуемся разложением , где (см. пример 5 в

предыдущей теме):

Проверим, можем ли мы отбросить остаток после первых трех членов

разложения, для этого оценим его с помощью суммы бесконечно убывающей

геометрической прогрессии:

.

Таким образом, мы можем отбросить этот остаток и получаем

.

**31. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное**

**решения. Геометрический смысл. Задача Коши.**

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае имеет вид

F(x, y, y′) = 0 ,

или, если можно разрешить относительно y′ , то оно примет форму

y′ = f (x, y) (2)

и называется **дифференциальным уравнением первого порядка,**

**разрешенным относительно производной**.

В некоторых случаях уравнение (2) удобно записать в виде

dy/dx = f(x,y) , или в виде f (x, y)dx − dy = 0 ,

которое является частным случаем более общего уравнения

P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, (3)

где P( x, y) и Q(x, y) – известные функции. Уравнение в симметричной

форме (3) удобно тем, что переменные x и y здесь равноправны, это значит

каждую из них можно рассматривать как функцию второй.

Имеет место следующая теорема о существовании и единственности

решения дифференциального уравнения (2).

**Частным решением дифференциального уравнения** (2)

называется решение, которое получается из общего решения при

конкретном значении произвольной постоянной *C* .

Часто общее решение дифференциального уравнения получают в

неявном виде, т.е. (5)

В этом случае равенство (5) называется общим интегралом

(5)дифференциального уравнения. Если в соотношении (5) положить ,

то получим частный интеграл.

**Теорема (Коши)**. Если функция и её частная производная

непрерывны в некоторой области *D*

плоскости , котора*Я* содержит точку (*x*0 , *y*0 ), то найдется интервал

, на котором существует единственное решение *y* = *y*(*x*) уравнения

удовлетворяет условию

Геометрически это означает, что через каждую внутреннюю точку

(*x*0 , *y*0 ) области *D* проходит единственная интегральная кривая

дифференциального уравнения .

**32. Уравнения с разделяющимися переменными.**

Дифференциальное уравнение первого порядка y′=f(x, y) называется

уравнением с разделяющимися переменными, если функцию f(x, y) можно

представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y:

f(x, y) =p(x) h(y),

где p(x) и h(y) − непрерывные функции.

Рассматривая производную y′ как отношение дифференциалов dy/dx,

перенесем dx в правую часть и разделим уравнение на h(y):

dy/dx = p(x)\*h(y), ⇒ dy/h(y) = p(x)\*dx

Разумеется, нужно убедиться, что h(y)≠0. Если найдется число x0, при

котором h(x0)=0, то это число будет также являться решением

дифференциального уравнения. Деление на h(y) приводит к потере указанного

решения.

Обозначив q(y) = 1h(y), запишем уравнение в форме:

q(y) dy = p(x) dx

Теперь переменные разделены, и мы можем проинтегрировать

дифференциальное уравнение: ∫q(y) dy=∫p(x) dx + C,

где C − постоянная интегрирования.

Вычисляя интегралы, получаем выражение

Q(y) = P(x) + C,

описывающее общее решение уравнения с разделяющимися

переменными.

**33. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.**

**Определение**. Дифференциальное уравнение первого порядка

dy/dx =f (x, y)

называется однородным, если правая часть удовлетворяет соотношению

f(tx, ty)=f(x, y) для всех значений t.

Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией

нулевого порядка по отношению к переменным x и y:

f(tx, ty) = t0f(x, y) = f(x, y)

**34. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка – уравнение

вида:

(1)

- непрерывные на некотором промежутке функции.

Если ≠ 0, то уравнение (1) можно преобразовать следующим образом:

y*’* + p(x)y = f(x), (2)

где p(x) =

Дифференциальное линейное однородное уравнение, соответствующее

уравнению (2):

y*’* + p(x)y = 0 (3)

**Метод Лагранжа**:

Применяется для поиска общего решения неоднородного уравнения (2).

Сначала найдем решение уравнения (3), которое представляет собой

уравнение с разделяющимися переменными. y = 0 является решением

уравнения (3). При y ≠ 0:

Интегрируем это уравнение: ln|y| = - P(x) + ln|C|,

где P(x) = а C – отличная от нуля постоянная.

Из последнего уравнения находим общее решение уравнения (3):

y = *Ce-P(x)* (4)

Здесь C – уже произвольная постоянная, так как решение y = 0 входит в

(4) при C = 0.

Теперь заменим в формуле (4) постоянную C на некоторую (искомую)

функцию C(x), то есть общее решение уравнения (2) будем искать в виде:

y = *C(x)e-P(x)* (5)

Из (5) следует:

*y’ = C’e-P(x) – Ce-P(x)p(x)* (6)

Подставляя выражения для *y* и *y’* из (5) и (6) в (2), находим

*C’e-P(x) – Ce-P(x)p(x)* + *p(x)Ce-P(x)* = *f(x).*

Отсюда получим, что

*C’ = f(x)eP(x)*

Следовательно,

(7)

Подставив в (5) выражение для C(x), получим общее решение уравнения

(2).

**Алгоритм решения методом Лагранжа:**

1) для заданного неоднородного уравнения (2) выписать соответствующее

ему однородное уравнение (формула(3));

2) методом разделения переменных найти общее решения однородного

уравнения (формула(4));

3) в общем решении однородного уравнения заменить постоянную C на

функцию C(x) (формула(5));

4) подставить полученное в пункте 3 выражение в исходное неоднородное

уравнение и найти C(x) (формула(7));

5) выписать общее решение неоднородного уравнения, подставив

выражение для C(x) в (5).

**35. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго**

**порядка с постоянными коэффициентами.**

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

*y’’ + py’ + qy =* 0,

где *p, q* – постоянные коэффициенты.

Для каждого дифференциального уравнения можно записать так

называемое характеристическое уравнение:

*k2 + pk + q =* 0.

Обшее решение однородного дифференциального уравнения зависит от

корней характеристического уравнения, которое в данном случае будет

являться квадратным уравнением. Возможны следующие случаи:

1. Дискриминант характеристического квадратного уравнения

положителен: D > 0. Тогда корни характеристического уравнения k1 и

k2 действительны и различны. В этом случае общее решение

описывается функцией

*y(x) = C1ek1x,* где C1 и C2 – произвольные действительные числа.

2. Дискриминант характеристического квадратного уравнения равен

нулю: D = 0. огда корни действительны и равны. В этом случае говорят,

что существует один корень k1 второго порядка. Общее решение

однородного дифференциального уравнения имеет вид:

*y(x) = (C1x + C2)ek1x*. 3. Дискриминант характеристического квадратного уравнения

отрицателен: D < 0. Такое уравнение имеет комплексно-сопряженные

корни

Общее решение записывается в виде

.

Рассмотренные три случая удобно представить в виде таблицы:

**36. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго**

**порядка с постоянными коэффициентами.**

***Структура общего решения***

Линейное неоднородное уравнение данного типа имеет вид:

y′′+py′+qy=f(x),

где p,q − постоянные числа (которые могут быть как действительными, так и

комплексными). Для каждого такого уравнения можно записать

соответствующее *однородное уравнение*:

y′′+py′+qy=0.

*Теорема*: Общее решение неоднородного уравнения является суммой

общего решения y0(x) соответствующего однородного уравнения и частного

решения y1(x) неоднородного уравнения:

y(x)=y0(x)+y1(x).

Ниже мы рассмотрим два способа решения неоднородных

дифференциальных уравнений.

***Метод вариации постоянных***

Если общее решение y0 ассоциированного однородного уравнения

известно, то общее решение неоднородного уравнения можно найти,

используя *метод вариации постоянных*.

Пусть общее решение однородного дифференциального уравнения

второго порядка имеет вид:

y0(x)=C1Y1(x)+C2Y2(x).

Вместо постоянных C1 и C2 будем рассматривать вспомогательные

функции C1(x) и C2(x). Будем искать эти функции такими, чтобы решение

y=C1(x)Y1(x)+C2(x)Y2(x)

удовлетворяло неоднородному уравнению с правой частью f(x).

Неизвестные функции C1(x) и C2(x) определяются из системы двух

уравнений:

{C′1(x)Y1(x)+C′2(x)Y2(x)=0

C′1(x)Y′1(x)+C′2(x)Y′2(x)=f(x)

***Метод неопределенных коэффициентов***

Правая часть f(x) неоднородного дифференциального уравнения часто

представляет собой многочлен, экспоненциальную или тригонометрическую

функцию, или некоторую комбинацию указанных функций. В этом случае

решение удобнее искать с помощью *метода неопределенных*

*коэффициентов*.

Подчеркнем, что данный метод работает лишь для ограниченного класса

функций в правой части, таких как

1. f(x)=Pn(x)eαx;

2. f(x)=[Pn(x)cos(βx)+Qm(x)sin(βx)]eαx, где Pn(x) и Qm(x)− многочлены

степени n и m, соответственно.

В обоих случаях выбор частного решения должен соответствовать

структуре правой части неоднородного дифференциального уравнения.

В случае 1, если число α в экспоненциальной функции совпадает с

корнем характеристического уравнения, то частное решение будет содержать

дополнительный множитель xs, где s − кратность корня α в

характеристическом уравнении.

В случае 2, если число α+βi совпадает с корнем характеристического

уравнения, то выражение для частного решения будет содержать

дополнительный множитель x.

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой

найденного выражения для частного решения в исходное неоднородное

дифференциальное уравнение.

***Принцип суперпозиции***

Если правая часть неоднородного уравнения представляет

собой *сумму* нескольких функций вида

Pn(x)eαx и/или [Pn(x)cos(βx)+Qm(x)sin(βx)]eαx,

то частное решение дифференциального уравнения также будет являться

суммой частных решений, построенных отдельно для каждого слагаемого в

правой части.